

2021

MATHEMATICS — GENERAL

Paper : GE/CC-3

Full Marks : 65

*Candidates are required to give their answers in their own words
as far as practicable.*

Symbols and notations have their usual meanings.

প্রান্তলিখিত সংখ্যাগুলি পূর্ণমান নির্দেশক।

১। নিম্নলিখিত সব প্রশ্নগুলির উত্তর দাও :

১×১০

(ক) $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$ -এর মান হল

(অ) 0

(আ) 1

(ই) e

(ঈ) $\frac{1}{e}$

(খ) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}$ -এর মান হল

(অ) 0

(আ) $\frac{\pi}{4}$

(ই) $\frac{\pi}{2}$

(ঈ) π

(গ) $\int_{-a}^a x\sqrt{a^2-x^2} dx$ -এর মান হল

(অ) 0

(আ) a

(ই) $\frac{a}{2}$

(ঈ) 1

(ঘ) যদি $P(x)$ একটি r ঘাতের বহুপদ রাশিমালা হয় এবং এর 12-তম অগ্রসারী অন্তর শূন্য হয় তবে

(অ) $r \leq 12$

(আ) $r = 12$

(ই) $r \geq 12$

(ঈ) $r < 12$

Please Turn Over

- (ঙ) Trapezoidal নিয়মের মাধ্যমে $\int_a^b f(x)dx$ -এর মান সঠিক হবে যদি $f(x)$ একটি বহুপদ রাশিমালা যার ঘাত হবে
- (অ) 2 (আ) 4
(ই) 6 (ঈ) এদের কোনোটিই নয়।
- (চ) Simpson's one-third-এর নিয়মে precision-এর ঘাত হল
- (অ) 1 (আ) 2
(ই) 3 (ঈ) 4
- (ছ) $3 - 5x - x^2 = 0$ সমীকরণের একটি বীজ যাদের মধ্যে থাকবে তারা হল
- (অ) 2 এবং 3 (আ) 1 এবং 4
(ই) 1 এবং 2 (ঈ) 0 এবং 1
- (জ) $S = \{(x_1, x_2) \mid 3x_1 + 2x_2 = 5\}$ এই সেটের প্রান্তিক বিন্দুর সংখ্যা হল
- (অ) 0 (আ) 1
(ই) 2 (ঈ) অসংখ্য।
- (ঝ) যদি $(4, 3, 2)$, $(2, 1, 4)$ এবং $(2, 3, k)$ ভেক্টর তিনটি রৈখিকভাবে নির্ভরশীল হয়, তবে k -এর মান হবে
- (অ) 0 (আ) 1
(ই) -8 (ঈ) -2
- (ঞ) সিমপ্লেক্স পদ্ধতিতে কোন রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার সমাধানের ক্ষেত্রে যদি একটি বাধা $3x_1 + x_2 + x_3 \geq 7$ এইরূপে থাকে, তবে যে চলরাশির প্রবেশ ঘটতে হয়, তা হল
- (অ) Slack চলরাশি (আ) Surplus চলরাশি
(ই) মৌল চলরাশি (ঈ) উপরের কোনোটিই নয়।

ইউনিট - ১

(সমাকলন বিদ্যা)

২। যে-কোনো তিনটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

(ক) যদি $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$ এবং $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ হয় তবে দেখাও যে (অ) $I_n = J_n$ (আ) $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ ।

অতঃপর $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^9 x dx$ -এর মান নির্ণয় করো।

১+২+২

(খ) দেখাও যে $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{8} \log 2$ ৫

(গ) মান নির্ণয় করো : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n} \right]$ ৫

(ঘ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta \cos^6 \theta$ -কে বিটা অপেক্ষকের আকারে প্রকাশ করো এবং তারপর মান নির্ণয় করো। ১+৪

(ঙ) দেখাও যে $\Gamma\left(\frac{1}{9}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{2}{9}\right) \dots \Gamma\left(\frac{8}{9}\right) = \frac{3}{16} \pi^4$ । ৫

ইউনিট - ২

(সাংখ্যিক পদ্ধতি)

৩। যে-কোনো চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

(ক) পার্থক্য সারণী নির্ণয় করো :

| | | | | |
|--------|-----|-----|-----|------|
| x | 0 | 5 | 10 | 20 |
| $f(x)$ | 1.0 | 2.6 | 3.8 | 15.4 |

৫

(খ) $h = 1$ ধরে $(\Delta + \nabla)^2 f(x)$ -এর মান নির্ণয় করো যেখানে $f(x) = x^2 + x$ ৫

(গ) Trapezoidal-এর নিয়মে ১০টি উপ-অন্তর নিয়ে $\int_0^1 (4x + 3x^2) dx$ -এর মান নির্ণয় করো। সঠিক মানের সঙ্গে তুলনা করো

এবং আপেক্ষিক ত্রুটির মান নির্ণয় করো।

৩+১+১

(ঘ) প্রদত্ত ছক থেকে বহুপদ রাশিমালা নির্ণয় করো যার ঘাত 3 :

| | | | | |
|-----|-----|-----|---|----|
| x | -1 | 0 | 1 | 2 |
| y | 0.1 | 0.5 | 1 | -3 |

৫

(ঙ) Newton-Raphson পদ্ধতিতে $x^3 + 3x - 5 = 0$ সমীকরণের চার সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত একটি ধনাত্মক বীজ নির্ণয় করো। ৫

(চ) দুইটি উপ-অন্তর নিয়ে Trapezoidal এবং Simpson's one-third-এর নিয়মে $\int_{-1}^1 |x| dx$ -এর মান নির্ণয় করো। এদের

মধ্যে যার ত্রুটির পরিমাণ কম সেটি উল্লেখ করো।

৪+১

(ছ) সমদ্বিখণ্ডন (Bisection) পদ্ধতি ব্যবহার করে (0, 1) অন্তরে দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মানে $x^4 + 2x^2 + x - 2 = 0$ সমীকরণের একটি বীজ নির্ণয় করো। ৫

Please Turn Over

ইউনিট - ৩

(রৈখিক প্রোগ্রামিং)

8। যে-কোনো চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

(ক) প্রমাণ করো যে, $X = \{(x, y) \mid x + 2y \leq 5\}$ সেটটি E^2 -তে একটি convex সেট। ৫(খ) $x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 5$ হল নিম্নলিখিত সহসমীকরণের একটি কার্যকর সমাধান : ৫

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 10$$

$$x_1 + 4x_2 = 18$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

ওই কার্যকর সমাধানকে মৌল কার্যকর সমাধানে রূপান্তরিত করো।

(গ) লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করো : ৫

চরম $Z = 2x_1 + x_2$

যেখানে, $x_1 + x_2 \geq 5$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 20$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 25$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

(ঘ) dual সমস্যাটি লেখো যেখানে মুখ্য সমস্যাটি হল : ৫

অবম $Z = x_1 + 3x_2$

যেখানে, $x_1 + x_2 \leq 3$

$$2x_1 - x_2 \geq -1$$

$$x_1 + 2x_2 = 5$$

এবং $x_1 \geq 0, x_2$ -এর চিহ্ন অমীমাংসিত।

(ঙ) Simplex পদ্ধতিতে রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যাটি সমাধান করো : ৫

চরম $Z = x_1 + x_2 + 3x_3$

যেখানে, $3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 3$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 2$$

এবং $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

(5)

V(3rd Sm.)-Mathematics-G/(GE/CC-3)/CBCS

(চ) নিম্নলিখিত পরিবহন সমস্যাটির সমাধান করো :

৫

| | D_1 | D_2 | D_3 | D_4 | a_i |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| O_1 | 6 | 4 | 2 | 7 | 8 |
| O_2 | 5 | 2 | 4 | 6 | 14 |
| O_3 | 6 | 5 | 2 | 5 | 9 |
| O_4 | 4 | 3 | 2 | 1 | 11 |
| b_j | 7 | 13 | 12 | 10 | |

(ছ) নিম্নলিখিত Profit matrix-এর আরোপ সমস্যাটি সমাধান করো :

৫

| | | মানুষ | | | |
|-----|-----|-------|----|----|----|
| | | A | B | C | D |
| কাজ | I | 10 | 25 | 15 | 20 |
| | II | 15 | 30 | 5 | 16 |
| | III | 35 | 20 | 12 | 24 |
| | IV | 17 | 25 | 24 | 20 |

[English Version]*The figures in the margin indicate full marks.*1. Answer *all* questions :

1×10

(a) Value of $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$ is

(i) 0

(ii) 1

(iii) e (iv) $\frac{1}{e}$.(b) Value of $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}$ is

(i) 0

(ii) $\frac{\pi}{4}$ (iii) $\frac{\pi}{2}$ (iv) π .**Please Turn Over**

- (c) Value of $\int_{-a}^a x\sqrt{a^2-x^2} dx$ is
- (i) 0 (ii) a
(iii) $\frac{a}{2}$ (iv) 1.
- (d) If $P(x)$ is a polynomial of degree r and 12th forward difference of $P(x)$ is zero then
- (i) $r \leq 12$ (ii) $r = 12$
(iii) $r \geq 12$ (iv) $r < 12$.
- (e) Trapezoidal rule in finding $\int_a^b f(x)dx$ gives exact value if $f(x)$ is a polynomial of degree
- (i) 2 (ii) 4
(iii) 6 (iv) None of these.
- (f) The degree of precision of Simpson's one-third rule is
- (i) 1 (ii) 2
(iii) 3 (iv) 4.
- (g) One of the roots of $3 - 5x - x^2 = 0$ lies in between
- (i) 2 and 3 (ii) 1 and 4
(iii) 1 and 2 (iv) 0 and 1.
- (h) The number of extreme points of the set $S = \{(x_1, x_2) \mid 3x_1 + 2x_2 = 5\}$ is
- (i) 0 (ii) 1
(iii) 2 (iv) infinite.
- (i) If the vectors $(4, 3, 2)$, $(2, 1, 4)$ and $(2, 3, k)$ are linearly dependent, then the value of k is
- (i) 0 (ii) 1
(iii) -8 (iv) -2 .
- (j) To solve by simplex method of the LPP having one of the constraints $3x_1 + x_2 + x_3 \geq 7$, we have to introduce in it a
- (i) slack variable (ii) surplus variable
(iii) basic variable (iv) None of these.

Unit - 1
(Integral Calculus)

2. Answer *any three* questions :

(a) If $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$ and $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$

Show that (i) $I_n = J_n$

(ii) $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$

Also find the value of $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^9 x dx$.

1+2+2

(b) Show that $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{8} \log 2$.

5

(c) Find the value of $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n} \right]$.

5

(d) Express $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta \cos^6 \theta$ as a Beta function and hence evaluate it.

1+4

(e) Show that $\Gamma\left(\frac{1}{9}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{2}{9}\right) \dots \Gamma\left(\frac{8}{9}\right) = \frac{3}{16} \pi^4$.

5

Unit - 2
(Numerical Methods)

3. Answer *any four* questions :

(a) Given the following table,

| | | | | |
|--------|-----|-----|-----|------|
| x | 0 | 5 | 10 | 20 |
| $f(x)$ | 1.0 | 2.6 | 3.8 | 15.4 |

Construct the difference table.

5

Please Turn Over

- (b) Taking $h = 1$, find the value of $(\Delta + \nabla)^2 f(x)$, where $f(x) = x^2 + x$. 5
- (c) Evaluate $\int_0^1 (4x + 3x^2) dx$, taking 10 sub-intervals by Trapezoidal Rule. Compare the exact value and find the relative error. 3+1+1
- (d) Find the polynomial of degree 3 from the given table : 5
- | | | | | |
|-----|-----|-----|---|----|
| x | -1 | 0 | 1 | 2 |
| y | 0.1 | 0.5 | 1 | -3 |
- (e) Find a positive real root of $x^3 + 3x - 5 = 0$ by Newton-Raphson method correct to four significant figures. 5
- (f) Find the values of the integral $\int_{-1}^1 |x| dx$ by Trapezoidal and Simpson's one-third Rule taking two sub-intervals. Which one of these involves less error? 4+1
- (g) Use the method of Bisection to find a root of the equation $x^4 + 2x^2 + x - 2 = 0$ lying in the interval $(0, 1)$ correct upto 2-decimal places. 5

Unit - 3

(Linear Programming)

4. Answer **any four** questions :

- (a) Prove that in E^2 the set $X = \{(x, y) \mid x + 2y \leq 5\}$ is a convex set. 5
- (b) Given $x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 5$ is a feasible solution to the following system of equations 5
- $$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 10$$
- $$x_1 + 4x_2 = 18$$
- $$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Reduce the feasible solution to a basic feasible solution.

- (c) Solve graphically the following LPP : 5

Maximize $Z = 2x_1 + x_2$

Subject to $x_1 + x_2 \geq 5$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 20$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 25$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

(d) Write down the Dual of the following primal problem :

5

$$\text{Minimize } Z = x_1 + 3x_2$$

$$\text{Subject to } x_1 + x_2 \leq 3$$

$$2x_1 - x_2 \geq -1$$

$$x_1 + 2x_2 = 5$$

and $x_1 \geq 0$, x_2 is unrestricted in sign.

(e) Solve the following LPP by simplex method :

5

$$\text{Maximize } Z = x_1 + x_2 + 3x_3$$

$$\text{Subject to } 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 3$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 2$$

and $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

(f) Solve the following transportation problem

5

| | D_1 | D_2 | D_3 | D_4 | a_i |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| O_1 | 6 | 4 | 2 | 7 | 8 |
| O_2 | 5 | 2 | 4 | 6 | 14 |
| O_3 | 6 | 5 | 2 | 5 | 9 |
| O_4 | 4 | 3 | 2 | 1 | 11 |
| b_j | 7 | 13 | 12 | 10 | |

(g) Solve the assignment problem with following profit matrix.

5

| | | Man | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| | | A | B | C | D |
| Job | I | 10 | 25 | 15 | 20 |
| | II | 15 | 30 | 5 | 16 |
| | III | 35 | 20 | 12 | 24 |
| | IV | 17 | 25 | 24 | 20 |
